COMPTE RENDU

DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 29 AOUT 1870.

PRÉSIDENCE DE M. LIOUVILLE.

MÉMOIRES PRÉSENTÉS.

HYDRODYNAMIQUE. — *Essai théorique sur les lois trouvées expérimentalement par* M. Bazin *pour l'écoulement uniforme de l'eau dans les canaux découverts*. Note de **M. J. Boussinesq**, présentée par M. de Saint-Venant.

(Renvoi à la Section de Géométrie.)

« M. Em. Mathieu, en 1863 (*Comptes rendus*, t. LVII, p. 320), et moi-même, en 1867 (*Comptes rendus*, t. LXV, p. 46), nous avons montré que les formules données par Navier pour représenter les mouvements des fluides, en tenant compte de leurs frottements intérieurs, sont exactes lorsque les vitesses varient avec continuité d'un point aux points voisins. Il suffit, en effet, d'admettre que dans ce cas la vitesse est nulle contre les parois mouillées, hypothèse dont j'établis à l'article cité, par un raisonnement simple, l'extrême vraisemblance, pour que ces formules conduisent aux lois expérimentales si précises de M. Poiseuille sur l'écoulement des liquides dans les tubes capillaires, et aussi, comme je le montre au § X d'un *Mémoire sur l'influence des frottements dans les mouvements réguliers des fluides* (*Journal de Mathématiques*, t. XIII, 1868), à celles de M. Graham relatives à la transpiration des gaz. Les mêmes formules rendent également compte de deux lois sur l'écoulement permanent de l'eau à travers les sables, découvertes par MM. Darcy et Ritter (*les Fontaines publiques de la ville de*

Dijon, par M. Darcy, p. 590), et consistant en ce que la dépense par chaque mètre carré de base d'une couche sablonneuse, de nature homogène, est proportionnelle à la pression et en raison inverse de l'épaisseur de la couche; car, si l'on assimile une couche pareille à un réseau de tubes très-petits disposés suivant les trajectoires des diverses molécules liquides, tubes dont la longueur moyenne sera évidemment proportionnelle à l'épaisseur de la couche, et dont la forme et les dimensions dépendront de sa nature, ces lois découleront immédiatement des deux premières de M. Poiseuille, relatives à la pression et à la longueur des tubes, et qui subsistent (§ VIII du Mémoire cité), la première dans tous les cas, et la seconde toutes les fois que ces tubes sont décomposables en petites parties sensiblement pareilles les unes aux autres et d'ailleurs irrégulières.

» Mais je fais voir au § IX du même Mémoire qu'il n'en est pas ainsi lorsqu'il s'agit de canaux découverts ou de tuyaux de conduite d'un certain calibre. Le liquide, n'étant plus alors aussi resserré latéralement, possède toujours des mouvements oscillatoires rapprochant ou éloignant brusquement des parois le fluide qui en est voisin. L'action tangentielle qu'exerce la paroi sur ce fluide change donc sans cesse, et, par ses variations combinées avec la vitesse générale de translation du même fluide, imprime à ce dernier des mouvements rotatoires. Ceux-ci se transmettant aux couches liquides plus intérieures, toute la masse fluide est bientôt sillonnée de tourbillons dont la matière glisse, avec une vitesse relative finie, sur celle qui l'environne. La moyenne des vitesses observées en un même point durant un petit instant n'est donc plus sensiblement égale à chacune d'elles, et la force tangentielle moyenne exercée à travers un petit élément plan fixe doit dépendre, non-seulement de la manière dont varie cette vitesse moyenne aux points environnants, c'est-à-dire des dérivées du premier ordre par rapport aux coordonnées x, y, z de ses trois composantes u, v, w suivant les axes, mais encore de la grandeur et du nombre des discontinuités dont les vitesses vraies y sont affectées. En effet, les frottements produits dans ce cas étant dus à des glissements finis entre couches adjacentes, doivent être bien plus grands que si les vitesses vraies variaient avec continuité de chaque point aux points voisins.

» Bornons-nous à étudier le mouvement permanent uniforme dans un tuyau à section rectangulaire de hauteur $2h$ et de base horizontale indéfinie, ou à section circulaire de rayon R, en supposant ce tuyau : 1° plein de liquide; 2° rempli seulement jusqu'à son milieu, avec une atmosphère calme au-dessus. Nous prendrons : pour axe des x d'un système de coor-

données rectangulaires, et dans le sens du mouvement, l'axe même du tuyau; pour axe des y, une horizontale; pour axe des z, une droite, dirigée en bas, dont α désignera l'inclinaison sur la verticale, et nous admettrons, pour abréger, que la pression soit la même à l'entrée et à la sortie du tuyau. Les vitesses moyennes seront réduites à leurs composantes u, et chaque surface d'égale vitesse se composera, dans le premier cas, des deux plans $z^2 =$ const., ou d'un cylindre de rayon r décrit autour de l'axe des x; dans le second, de la partie de ces surfaces qui est au-dessous du plan des xy. Appelons F l'action tangentielle moyenne, évidemment parallèle aux x, qui est exercée sur l'unité de cette surface, ρ la densité du liquide. L'égalité des frottements à la composante suivant les x du poids du liquide compris dans une surface d'égale vitesse, ou entre une de ces surfaces et la surface libre, donnera

$$(1) \qquad \text{soit} \quad F + \rho g z \sin\alpha = 0, \qquad \text{soit} \quad 2F + \rho g r \sin\alpha = 0.$$

F dépend : 1° de la vitesse u_0 du liquide voisin de la paroi, car cette vitesse est un élément essentiel dans la production des tourbillons auxquels sont dus les frottements considérés : la force F s'annulant presque lorsque u_0 s'annule, la manière la plus simple dont elle puisse en dépendre, c'est de lui être proportionnelle; 2° des mouvements oscillatoires perpendiculaires à la paroi dont sont animées les particules liquides qui s'en trouvent voisines : en effet, ces mouvements constituent l'autre élément variable qui concourt à la formation des tourbillons; comme ils sont favorisés par la grandeur de la section et gênés au contraire par les parois, le plus simple est de supposer F en raison directe de la section et inverse du contour mouillé, c'est-à-dire proportionnel au *rayon moyen* h ou $\frac{R}{2}$; 3° des variations que subit, à partir des parois, en allant vers l'intérieur, l'agitation due aux mouvements tourbillonnaires, car les considérations précédentes ne la définissent qu'aux points voisins des parois; il est naturel de supposer cette agitation, et par suite F, constante si les surfaces sur lesquelles elle se propage à partir des parois, et qui sont parallèles à celles-ci, ont toutes la même aire, et variables en raison inverse de cette aire si elles ne sont pas toutes égales; dans le cas du tuyau rectangulaire de base indéfinie, elle sera partout la même, tandis que, dans celui du tuyau circulaire, elle vaudra, à la distance r de l'axe, sa valeur à la paroi multipliée par le rapport de R à r; s'il y a une surface libre, nous admettrons qu'on puisse négliger dans une première étude les phénomènes spéciaux (par exemple une cer-

taine perte de force vive translatoire) qu'y entraîne l'exagération des mouvements tourbillonnaires, surtout quand les vitesses moyennes y sont petites; 4° F dépend enfin de la distribution des vitesses moyennes autour du point considéré, c'est-à-dire de la dérivée $\frac{du}{dz}$ ou $\frac{du}{dr}$, qui définit cette distribution : en effet, cette dérivée, mesurant le glissement moyen du fluide adjacent à la face extérieure de la surface $z^2 =$ const. ou $r =$ const. sur celui qui occupe l'autre face, donne son signe à F, et il est naturel, tant qu'elle ne sera pas trop grande, de lui supposer F proportionnel. D'après cela, A désignant un coefficient variable avec le degré de poli des parois, on aura

$$(2) \qquad \text{soit} \quad F = \rho g A u_0 h \frac{du}{dz}, \qquad \text{soit} \quad F = \rho g A u_0 \frac{R}{2} \frac{R}{r} \frac{du}{dr}.$$

Pour $z = h$ ou $r = R$, $-F$ est égal au frottement exercé sur le liquide par l'unité de surface de la paroi. Ce frottement doit être supposé proportionnel : 1° à u_0, c'est-à-dire au nombre des molécules fluides qui viennent s'y heurter; 2° à une certaine fonction de u_0 qui représentera l'action tangentielle moyenne de la paroi sur ces molécules, et qui, s'annulant presque pour u_0 très-petit, pourra sans doute être prise de la forme Bu_0, si cette vitesse n'est ni trop petite, ni trop grande. On conçoit qu'il varie en outre avec les mouvements oscillatoires du liquide, c'est-à-dire avec le rayon moyen h ou $\frac{R}{2}$. Désignons par B un coefficient dépendant de ce rayon et des rugosités de la paroi, et il viendra

$$(3) \qquad \text{pour} \quad z = h \quad \text{ou} \quad r = R, \qquad -F = \rho g B u^2 = \rho g B u_0^2.$$

» Au moyen des relations (1), (2), (3), et en appelant U la vitesse moyenne, u_1 la vitesse sur l'axe des x, on trouve aisément

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{soit} \quad \dfrac{u}{\sqrt{h \sin\alpha}} = \dfrac{1}{\sqrt{B}} + \dfrac{\sqrt{B}}{2A}\left(1 - \dfrac{z^2}{h^2}\right), \quad U = \left(\dfrac{1}{\sqrt{B}} + \dfrac{\sqrt{B}}{3A}\right)\sqrt{h \sin\alpha}; \\ \text{soit} \quad \dfrac{u}{\sqrt{R \sin\alpha}} = \dfrac{1}{\sqrt{2B}} + \dfrac{\sqrt{2B}}{3A}\left(1 - \dfrac{r^3}{R^3}\right), \quad U = \left(\dfrac{1}{\sqrt{B}} + \dfrac{6}{5}\dfrac{\sqrt{B}}{3A}\right)\sqrt{\dfrac{R}{2}\sin\alpha}; \\ u_1 - U = \quad \text{soit} \quad \dfrac{\sqrt{B}}{6A}\sqrt{h \sin\alpha}, \quad \text{soit} \quad \dfrac{8}{5}\dfrac{\sqrt{B}}{6A}\sqrt{\dfrac{R}{2}\sin\alpha}. \end{array} \right.$$

» Ces formules ont justement la forme de celles que l'expérience a indiquées à M. Bazin, et elles ne diffèrent sensiblement de celle que M. Darcy a donnée pour représenter les vitesses dans les tuyaux circulaires pleins de

liquide, qu'aux points voisins de la paroi, pour lesquels cet habile expérimentateur n'a fait aucune observation : les vitesses qu'il a mesurées ont été prises seulement sur l'axe des tuyaux, ainsi qu'au tiers et aux deux tiers des rayons. A égalité de rayon moyen, les formules (4) donnent U un peu plus grand quand la section est circulaire et offre, par conséquent, le moins de parois possibles, que lorsqu'elle est un rectangle de base indéfinie et présente, au contraire, plus de périmètre mouillé que les autres formes usitées : pour toutes celles-ci, l'expression de U sera donc à peu près la moyenne des deux précédentes. On voit, au contraire, que la valeur de $u_1 - U$ est assez variable avec la forme de la section. Enfin, dans les expressions de u, le coefficient de $\sqrt{h \sin \alpha}\,\frac{z^2}{h^2}$ est un peu plus grand que celui de $\sqrt{h \sin \alpha}\,\frac{r^3}{R^3}$. Tous ces résultats sont d'accord avec les expériences de M. Bazin. »

La séance est levée à 3 heures un quart. D.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

L'Académie a reçu, dans la séance du 22 août 1870, les ouvrages dont les titres suivent :

Evolution médicale, ou de l'électricité du sang chez les animaux vivants. De l'anesthésie et de l'unité des forces physiques et vitales; par M. H. SCOUTETTEN. Metz, 1870; br. in-8°.

Instruction pour la production de la glace et sa conservation dans les campements militaires; par M. Ch. TELLIER. Paris, 1870; br. in-18.

Annnaire spécial des vétérinaires militaires, année 1870. Paris, 1870; br. in-8°.

Mémoires de la Société d'Agriculture, Sciences, Belles-Lettres et Arts d'Orléans, 2e série, t. XIII, n° 3, 1870, 3e trimestre. Orléans, 1870; in-8°.

Archives néerlandaises des Sciences exactes et naturelles publiées par la Société hollandaise des Sciences de Harlem, et rédigées par M. E.-H. VON BAUMHAUER, t. V, liv. 1 à 3. La Haye, 1870; 3 br. in-8°.

Algæ japonicæ Musei botanici Lugduno-Batavi; auctore W.-F.-R. SURINGAR. Harlemi, 1870; br. in-4°.

Die... *Ostéologie et myologie du* Sciurus vulgaris, L.; *par* MM. C.-K. HOFFMANN *et* H. WEYENBERGH. Harlem, 1870; in-4°.

1870. *Liste des Membres de la Société hollandaise des Sciences de Harlem.* Sans lieu ni date; in-4°.

Programma... *Programme de la Société hollandaise des Sciences de Harlem pour les années* 1869 *et* 1870. Sans lieu ni date; 2 opuscules in-4°.

Observations... *Observations et recherches sur l'albinisme de la race nègre; par* M. J. JONES. Philadelphie, 1869; br. in-8°.

First... *Premier Rapport sur les ressources agricoles de la Géorgie; par* M. J. JONES. Augusta, 1860; in-8°.

Researches... *Recherches sur la fausse vaccination; par* M. J. JONES. Nashville, 1867; in-8°.

Clinical... *Mémoires cliniques. Études faites à l'hôpital de la Charité de la Nouvelle-Orléans; par* M. J. JONES. Sans lieu ni date; br. in-8°.

Mollities... *Le ramollissement des os, etc.; par* M. J. JONES. Philadelphie, 1869; br. in-8°.

Chemical... *Analyse chimique du sel gemme de la Louisiane.* Nouvelle-Orléans, 1869. (5 exemplaires.)

(Ces six ouvrages sont offerts, au nom de l'auteur, par M. P. Gervais.)

The... *Journal de la Société royale de Géographie*, t. XXXIX, 1869. Londres, sans date; in-8° relié.

Proceedings... *Procès-verbaux des réunions scientifiques de la Société zoologique de Londres,* 1869, 2e et 3e parties. Londres, sans date; in-8°.

Transactions... *Transactions de la Société zoologique de Londres*, t. VII, 1re et 2e parties. Londres, 1869; in-4°.

The... *Journal trimestriel de la Société géologique*, t. XXVI, n° 102. Londres, 1870; in-8°.

Atti... *Actes de la Société italienne des Sciences naturelles*, t. XII, fascicules 3 et 4. Milan, 1870; 2 br. in-8°.

Sulla... *Sur les lois de la division en deux carrés d'une puissance quelconque d'un chiffre quelconque semblablement divisible en une seule fois; Note du* prof. VOLPICELLI. Sans lieu ni date; br. in-4°. (Extrait des *Actes de l'Académie pontificale des* Nuovi Lincei.)

Nota... *Sur la solution générale en intégrales de l'équation*

$$x^2 + y^2 = z, \quad x^2 + y^2 = z^2.$$

Note du prof. VOLPICELLI. Sans lieu ni date; br. in-4°. (Extrait des *Actes de l'Académie pontificale des* Nuovi Lincei.)

Le... *Les anhydrides et les oxydrides de la théorie atomique, etc.; par* M. F. ORSONI. Sciacca, 1870; br. in-8°.

Reflexiones... *Réflexions sur le système planétaire; par* M. S. CLAVIJO. Santa-Cruz de Ténériffe, 1870; in-8°. (Présenté par M. d'Avezac.)

Das... *Le Musée impérial-royal Montanistische et la Société des Amis des Sciences de Vienne; par* M. W. DE HAIDINGER. Vienne, 1869; in-8°.

Natuurkundig... *Journal d'histoire naturelle des Indes néerlandaises*, t. XXXI, 7e série, 1re partie, liv. 1 à 3. Batavia, 1869; in-8°.

L'Académie a reçu, dans la séance du 29 août 1870, les ouvrages dont les titres suivent :

Bulletin de l'Académie impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg, t. XIV, nos 4 à 6. Saint-Pétersbourg, 1870; 3 nos in-4°.

Mémoires de l'Académie impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg, 7e série, t. XIV, nos 8 et 9; t. XV, nos 1 à 4. Saint-Pétersbourg, 1869-1870; 6 liv. in-4°.

Bulletin de la Société impériale des Naturalistes de Moscou, publié sous la rédaction du Dr RENARD, année 1869, nos 1 à 4. Moscou, 1869-1870; 4 brochures in-8°.

The... *Journal de la Société chimique*, t. VIII, mai, juin, juillet 1870. Londres, 1870; 3 br. in-8°.

PUBLICATIONS PÉRIODIQUES REÇUES PAR L'ACADÉMIE PENDANT LE MOIS D'AOUT 1870.

Annales de Chimie et de Physique; juillet 1870; in-8°.

Annales de l'Observatoire Météorologique de Bruxelles; n° 6, 1870; in-4°.

Annales des Conducteurs des Ponts et Chaussées; juin 1870; in-8°.

Association Scientifique de France; Bulletin hebdomadaire, nos 184 à 187, 1870; in-8°.

Bibliothèque universelle et Revue suisse; n° 152, 1870; in-8°.

Bulletin de l'Académie impériale de Médecine; 31 juillet 1870; in-8°.

Bulletin de l'Académie royale de Médecine de Belgique, n° 4, 1870; in-8°.

Bulletin de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique; n° 7, 1870; in-8°.

Bulletin de la Société de Géographie; juin 1870; in-8°.

Bulletin de la Société Géologique de France; feuilles 31 à 44, 1870; in-8°.

Bulletin de la Société Philomathique; janvier à mars 1870; in-8°.

Bulletin général de Thérapeutique; 15 août 1870; in-8°.

Bulletin hebdomadaire du Journal de l'Agriculture; n°s 32 à 35, 1870; in-8°.

Bullettino meteorologico del R. Osservatorio del Collegio Romano; n° 7, 1870; in-4°.

Correspondance slave; n°s 62 à 72, 1870; in-4°.

Cosmos; n^{os} des 6, 13, 20, 27 août 1870; in-8°.

Gazette des Hôpitaux; n°s 90 à 100, 1870; in-4°.

Gazette médicale de Paris; n°s 32 à 35, 1870; in-4°.

Il Nuovo Cimento... *Journal de Physique, de Chimie et d'Histoire naturelle;* mai 1870; in-8°.

Journal d'Agriculture pratique; n°s 31 à 34, 1870; in-8°.

Journal de Chimie médicale, de Pharmacie et de Toxicologie; août 1870; in-8°.

Journal de l'Agriculture; n°s 98 et 99, 1870; in-8°.

Journal de la Société impériale et centrale d'Horticulture; juillet 1870; in-8°.

Journal de l'Éclairage au Gaz; n°s 33 et 34, 1870; in-4°.

Journal de Médecine de l'Ouest; juin 1870; in-8°.

Journal de Médecine vétérinaire militaire; août 1870; in-8°.

(*La suite du* Bulletin *au prochain numéro.*)

ERRATA.

(Séance du 16 août 1870.)

Page 366, ligne 2, *au lieu de* Callet, *lisez* Caillet.
Page 368, ligne 1, *au lieu de* qu'elle, *lisez* qu'il.